



TITLE:

統計力学の可解模型と数理物理学  
の最近の発展: DNAなど高分子の結  
び目、量子XXZ鎖の異常な準位縮退  
とループ代数(基研研究会 確率モデ  
ルの統計力学,研究会報告)

AUTHOR(S):

出口, 哲生

---

CITATION:

出口, 哲生. 統計力学の可解模型と数理物理学の最近の発展: DNAなど高分子の結び目、  
量子XXZ鎖の異常な準位縮退とループ代数(基研研究会 確率モデルの統計力学,研究会報  
告). 物性研究 2004, 82(2): 310-319

ISSUE DATE:

2004-05-20

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/97802>

RIGHT:

## 統計力学の可解模型と数理物理学の最近の発展

— DNA など高分子の結び目、量子  $XXZ$  鎖の異常な準位縮退とループ代数 —

お茶の水女子大学 理学部物理 出口 哲生<sup>1</sup>

### 1 はじめに

この報告では、DNA など高分子の結び目の統計力学的研究と、可解量子スピン系の量子  $XXZ$  鎖における異常な準位縮退、の二つの異なる話題が解説される。そして両者をつなぐものとして、Temperley-Lieb 代数が重要であることを説明する。DNA の結び目は高分子物理のトピックであり、一方、後者は量子力学の基礎の話題であり、全く分野は異なっている。前提となる知識も相当に異なる。しかし数理物理の視点では、両方とも Temperley-Lieb 代数（以下、TL 代数または TLJ 代数と略称）の応用と深く関係する研究なのである。

最近十数年の間に、環状の DNA など環状高分子から結び目をつくることが可能となり、実験と理論の両方から研究されている [1-6]。特に、環状高分子の統計力学における結び目の効果が活発に研究されている [7-13]。環状高分子鎖の全ての空間配置の中には様々な結び目が含まれており、一定の結び目の配置のみを取り出すことは全く自明ではない。結び目一定の条件は排除体積効果と同様な効果を導くであろう、と des Cloizeaux (1981) は予想した [14]。これは最近のシミュレーションで部分的には裏付けられたとも言えるが、現在も研究が続く興味深い問題である。

結び目高分子の統計力学的研究において、新しいトポロジー不変量が非常に重要な役割を果たしている [7, 8]。実は Jones 多項式のある部分をうまく使うことによってはじめて本格的な結び目高分子の統計力学的研究が可能になった。一方、最近の新しいトポロジー不変量は Jones 多項式の発見に大きく刺激された結果はじめて導かれたものである。そして Jones 多項式を理解する上で、統計力学模型の TL 代数の知識は非常に便利で重要である [15-21]。

最近、量子  $XXZ$  鎖という可解量子スピン系を代表する模型において、異常な準位縮退の存在が明らかにされた [22]。  $XXZ$  異方性変数がある離散的特殊値のとき、  $XXZ$  鎖の対称性は非常に拡大してループ代数という無限次元の対称性となる [22, 23]。そして縮退度が格子サイズの指数関数で増大する異常な準位縮退が出現する [24]。Heilmann-Lieb の視点では、これは準位非交差則に対する驚異的な反例である [25-28]。TL 代数はこの縮退現象を説明する上で非常に役立つ。

TL 代数をキーワードにして、高分子と可解模型という全く異なる二つの分野が密接に関係する。TL 代数は量子群とも深く関係している。しかし、TL 代数それ自身は分かり易く、数学的に深い知識を前提としない。本質を理解する上で非常に便利な道具なのである。

---

<sup>1</sup> E-mail: deguchi@phys.ocha.ac.jp

## 2 DNAの結び目とランダム結び目

### 2.1 トポイソメラーゼとスーパーコイル

DNAは生命の遺伝情報を蓄えた巨大な分子である。遺伝情報をDNAから読み出す過程やDNAが自己複製する過程において、DNA鎖の空間的広がりやそのトポロジーの制御は重要である。これらはDNAトポイソメラーゼ (DNA topoisomerase) という酵素によって制御される [1, 2, 3]。

DNAの分子構造は、糖とリン酸からつくられた骨格となる高分子鎖が二本、互いに巻きつくような螺旋を形成したいわゆる二重螺旋である。さらに二本の骨格鎖上の塩基同士がそれぞれ対をつくって水素結合で結び付つく。このようにしっかりした構造を持っているため、DNAは曲げやねじれに対して剛性をもつ。DNAは負の荷電高分子であり、その静電的斥力も硬さに寄与する。そしてDNAの保持長は直径の50倍もある。このためDNA鎖の力学的性質は、非常に長くかつ細い弾性の棒、あるいはゴムひもで近似できる。

DNAの空間形状の変化に際しては、DNA鎖の弾性が重要である。大腸菌のプラスミドのDNAなど、自然界には環状のDNA分子が多数存在する。環状のDNAの場合、輪ゴムがそのモデルとなる。輪ゴムを一方の手で押さえ、他方の手で輪ゴムの一部分をひねると、ねじれが生じて輪ゴムが縮小する。ねじれた輪ゴムのように、ねじれて縮んだDNA鎖の形状を超らせん（あるいはスーパーコイル）とよぶ。

酵素のトポイソメラーゼは、DNAの二重螺旋を切断して二本の骨格鎖の巻き数を変化させた後にこれを再結合させ、DNAを局所的にひねる働きをする。そして輪ゴムの場合と同様にしてDNA全体を超らせんに変化させる。DNAトポイソメラーゼは環状のDNA鎖と同様に線状のDNA鎖にも作用し、現在までに調べられた範囲では、全ての種類の細胞の中に存在する。そして線状のDNA鎖の場合でも部分的に環状のループを形成することにより、環状鎖と同様なやり方で超らせん形などの空間形状の制御が行われると考えられている。

### 2.2 DNAの統計力学的模型とランダム結び目

DNA鎖は硬く、保持長はDNAの直径に対して約50倍と大きい。そこでDNAの統計力学的な性質はウォームライク鎖で表され、さらに単純化すると、細い円筒が連結した自己排除体積鎖となる [4]。これを円筒鎖模型とよぼう。DNAは溶液中で対イオンの雲に囲まれ、その実効的太さが円筒の直径に対応し、DNA鎖の保持長が円筒の長さに対応する。実験では、実効的太さは溶液中の対イオンの濃度で制御される。

トポイソメラーゼの作用を調べる実験等において、環状DNAから様々な結び目が導かれた [2]。トポイソメラーゼの機能は神秘的であり、物理学の視点から明らかにすることは容易でない。そこで第一段階として、一定の結び目をもつ環状高分子鎖の統計力学的性質の研究が重要であろう。環状高分子鎖の統計力学的性質は、ランダムポリゴンを用いて調べられる。ランダムポリゴンの中で一定の結び目のものを、ランダム結び目とよぶ。ランダム結び目の大きさ（慣性半径）や出現確率が結び目にどのように依存するか、という問題が最も基本的で重要な研究課題である。

ランダム結び目の実験も行われている [5, 6]。線形の DNA 鎖をランダムに閉じて環状鎖をつくる実験が行われ、ランダム結び目の出現確率が測定された。線形 DNA 鎖の端に細工を施し、両端の結合を可能とした。この結果、環状鎖と線形鎖の割合を温度で制御でき、電気泳動等で環状鎖のみを取り出すと、ランダム結び目を実現する。

### 2.3 結び目確率とトポロジーの効果

最近、新しい結び目不変量を応用してランダム結び目をシミュレーションで研究する方法が導かれた [7, 8]。これを応用して、円筒鎖模型のランダム結び目における排除体積効果が明らかにされた [9]。そして、結び目が生じる確率の排除体積依存性を表す従来の理論式 [4] が大幅に改良された。半径  $r$  で頂点数  $N$  の円筒環状鎖において、結び目  $K$  が生じる確率を  $P_K(N, r)$  と表すと、それは次の式で十分によく近似されることが分かった。

$$P_K(N, r) = C_K \left( \frac{N}{N_c(r)} \right)^{m(K)} \exp \left( -\frac{N}{N_c(r)} \right) \quad (1)$$

ここで  $C_K$  は結び目ごとに定められる定数、 $N_c(r)$  は半径  $r$  の関数で指数関数で近似される。

$$N_c(r) = N_c(0) \exp(\gamma r) \quad (2)$$

この新しい理論式において、頂点数（長さ）の効果は  $N_c(r)$  で繰り込まれる。そこで  $N_c(r)$  はランダム結び目の特性長とみなすことができる。この式は、頂点数  $N$  が非常に大きい長い環状高分子の場合に、de Gennes のスケーリングの考え方と整合的である。

また、一定のトポロジーをもつ環状高分子の大きさは、トポロジーを制限しない場合の環状高分子の大きさを基準として相対的にかなり大きくなることがわかった [10]。統計物理量に関しては、トポロジー一定の条件が高分子鎖のすり抜け禁止条件に対応する。このため、トポロジー的拘束から導かれるエントロピー的斥力によって鎖同士が反発するために環状鎖全体が拡大すると解釈できる。シミュレーションの結果では、この拡大効果は環状高分子の排除体積の大きさに依存し、高分子鎖が細い場合には拡大効果が顕著に現れ、鎖が太い場合には拡大効果は減少する。

上で述べられたシミュレーションの結果 [10] を理論的に説明することも可能である。頂点数  $N$  の環状高分子鎖の大きさは、次式で定義される慣性半径の自乗平均  $R^2$  で表される。

$$R^2 = \frac{1}{2N^2} \sum_{j,k=1}^N \langle (\vec{r}_j - \vec{r}_k)^2 \rangle \quad (3)$$

ここで  $\vec{r}_j$  は  $j$  番目の頂点の座標である。一定の結び目  $K$  をもつ環状鎖の慣性半径の自乗平均を  $R_K^2$  と表そう。  $N$  が十分に大きい場合、 $R^2$  も  $R_K^2$  も次のように漸近展開されるであろう。

$$\begin{aligned} R^2 &= AN^{2\nu} \left( 1 + BN^{-\Delta} + O(1/N) \right) \\ R_K^2 &= A_K N^{2\nu} \left( 1 + B_K N^{-\Delta} + O(1/N) \right) \end{aligned} \quad (4)$$

ここで  $\nu$  は自己排除体積鎖 (Self-Avoiding Walk) の指数である。そして振幅の比  $A_K/A$  は結び目によらずに一定値であった。この比  $\alpha$  を理論的に評価してみよう。ランダム結び目の特性長  $N_c$  が十分大きい場合、 $n = N/N_c$  において  $N$  の展開を  $N_c$  の展開と読み替えると、次が導かれる [11]。

$$\alpha = 1 + \Gamma/\sqrt{N_c} + O(1/N_c) \quad , \quad \Gamma = \frac{e^{-n}}{\sqrt{n}} \sum_K (B_K - B) C_K n^{m(K)} \quad (5)$$

上式の導出で  $\Delta = 1/2$  と仮定した。係数  $\Gamma$  は  $N$  に関して定数とは限らない。しかし実際に数値評価すると、シミュレーションの数値とかなり近い値が求まった [11]。この結果を受け入れると、特性長  $N_c(r)$  の半径依存性 (2) から、細い高分子鎖の場合にはトポロジ的制限によって環状鎖は拡大し、太い高分子鎖の場合にはトポロジ制限で大きさに変化がないことが説明できる。

このトポロジ的エントロピー力による環状鎖の拡大は、将来、結び目 DNA 等を用いた実験によって検証されるかもしれない。

### 3 Temperley-Lieb 代数と Jones 多項式

#### 3.1 Temperley-Lieb-Jones 代数

6 頂点模型やポッツ模型の研究の中で、Temperley と Lieb は次のような代数を導いた [15]。

$$\begin{aligned} E_j E_{j+1} E_j &= E_j, & E_{j+1} E_j E_{j+1} &= E_{j+1}, \\ (E_j)^2 &= Q^{1/2} E_j, & (j &= 1, 2, \dots, L-1), \\ E_j E_k &= E_k E_j, & (|i-j| > 1, & i, j = 1, \dots, L-1) \end{aligned} \quad (6)$$

上の関係式を満たす演算子  $\{E_j\}$  を、Temperley-Lieb 演算子 (TL 演算子) とよぶ。[15, 16] TL 演算子  $\{E_j\}$  で生成される代数を本報告では、Temperley-Lieb 代数 (TL 代数) あるいは Temperley-Lieb-Jones 代数 (TLJ 代数) とよぶ。

実は Temperley と Lieb が見出した代数は、作用素環とも関係する。因子環の研究の中で Jones が定義した射影子 [17] からジョーンズ多項式という新しい結び目不変量が導かれた [18]。ジョーンズ多項式の発見は当時の数理物理の展開の中で非常に重要で、その後に様々な結び目不変量が導かれる端緒となった [19, 20]。Jones の射影子は実は Temperley と Lieb が導いた代数と同じ定義関係式を満たす。そこで本解説ではこれを Temperley-Lieb-Jones 代数 (TLJ 代数) とよぶことにする。また、TLJ 代数は Iwahori-Hecke 代数の特別な場合でもある。

具体的な表現を与えてみよう。まず、4 行 4 列の行列  $U^\pm$  を次で定める。

$$U^\pm = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -q^{\pm 1} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -q^{\mp 1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

行列  $U^\pm$  から、演算子  $U_j^\pm$  を定義する。

$$U_j^\pm = I_1 \otimes \cdots \otimes I_{j-1} \otimes U^\pm \otimes I_{j+2} \otimes \cdots \otimes I_L \quad (8)$$

ここで  $I$  は 2 行 2 列の単位行列であり、記号  $\otimes$  は行列の直積を表す。演算子  $U_j^\pm$  は TLJ 代数の定義関係式 (6) を満たす。すなわち  $E_j = U_j^+$  (または  $E_j = U_j^-$ ) に対して式 (6) が成立する。これを具体的に示すことは容易である。ただし  $Q^{1/2}$  は  $Q^{1/2} = -(q + q^{-1})$  となる。

TL 演算子の表現行列 (8) を図解すると、行列  $U^\pm$  の部分が生成・消滅ダイアグラムに対応し、左から  $j$  本目と  $j+1$  本目に位置する。  $I_1 \otimes \cdots \otimes I_{j-1}$  および  $I_{j+2} \otimes \cdots \otimes I_L$  はそれぞれ、その左側および右側の垂直な平行直線群に対応する。



図 1: Temperley-Lieb 演算子  $E_j$  の対応する生成・消滅ダイアグラム

TL 演算子を生成・消滅ダイアグラムに対応させて、TLJ 代数の関係式 (6) を次のように図で説明できる。関係式  $(E_j)^2 = Q^{1/2} E_j$  において、ループは定数  $Q^{1/2}$  に対応する。

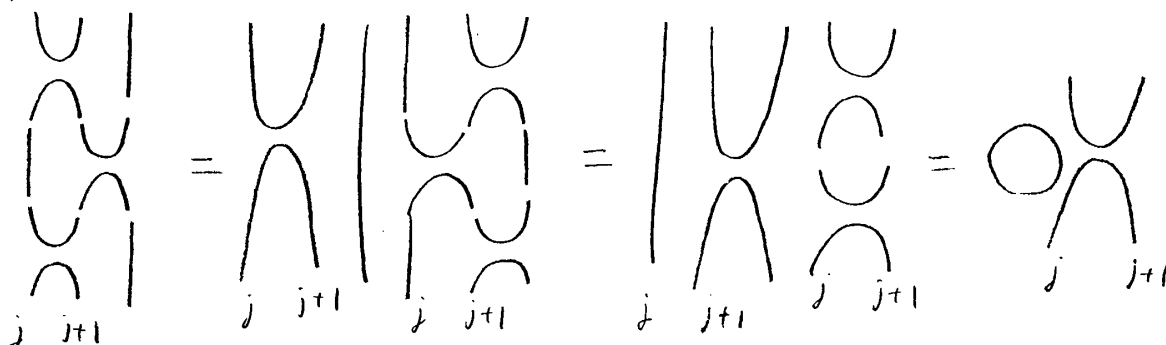


図 2: Temperley-Lieb 代数の図的説明。左からそれぞれ  $E_j E_{j+1} E_j = E_j$ 、 $E_{j+1} E_j E_{j+1} = E_{j+1}$ 、 $(E_j)^2 = Q^{1/2} E_j$  に対応する。

### 3.2 組みひも群の表現と TLJ 代数

TLJ 代数から、結び目や絡み目の不変量が導かれる。

$L$  本のひもに対応する組みひも群  $B_L$  を定義する [20]。水平な棒に結ばれた  $L$  本のひもが鉛直に垂れ下がっている。このひもを編んで組みひもをつくることを考える。様々な組みひもが可能であるが、どれも  $j$  番目と  $j+1$  番目のひもを交差させる操作  $b_j$  およびその逆演算  $b_j^{-1}$  を組み合わせて表現されることが分かる。すなわち、組みひも群  $B_L$  は要素  $b_1, b_2, \dots, b_{L-1}$  で生成される。ただし組みひもを生成元で表すやり方には、次のような関係式で表される不定性がある。

$$\begin{aligned} b_j b_{j+1} b_j &= b_{j+1} b_j b_{j+1}, & (j = 1, \dots, L-1) \\ b_i b_j &= b_j b_i, & (|i-j| > 1, \quad i, j = 1, \dots, L-1) \end{aligned} \quad (9)$$

これらを定義関係式とする群を、組みひも群とよぶ。組みひも群は、無限個の要素を持つ。

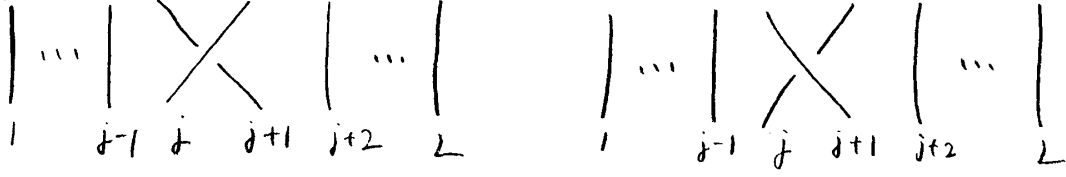


図 3: 組みひも群  $B_L$  の生成元  $b_j$  (左の図) とその逆元  $b_j^{-1}$  (右の図)

TLJ 代数の表現行列から、組みひも群の表現行列が導かれる。TL 演算子  $E_j$  の表現行列を  $e_j$  と表す。特に  $e_j^2 = -(q + q^{-1})e_j$  である。このとき、 $g_j$  を次式で定義すると、これは組みひも群の表現行列を与える。

$$g_j = 1 + qe_j, \quad g_j^{-1} = 1 + q^{-1}e_j, \quad (j = 1, \dots, L-1) \quad (10)$$

ここで 1 は  $I_1 \otimes \dots \otimes I_L$  を意味する。実際に上式を代入して、組みひも群の定義関係式を確認してみよう。それには  $j = 1$  の場合を考えれば十分である。 $g_1 g_2 g_1$  は次のように展開される。

$$\begin{aligned} g_1 g_2 g_1 &= (1 + qe_1)(1 + qe_2)(1 + qe_1) \\ &= 1 + q(e_1 + e_2 + e_1) + q^2(e_1 e_2 + e_2 e_1 + e_1^2) + q^3 e_1 e_2 e_1 \\ &= 1 + q(e_1 + e_2 + e_1) + q^2\{e_1 e_2 + e_2 e_1 - (q + q^{-1})e_1\} + q^3 e_1 \\ &= 1 + q(e_1 + e_2) + q^2(e_1 e_2 + e_2 e_1) \end{aligned} \quad (11)$$

ここで 2 行目から 3 行目に移るところで、TLJ 代数の関係式を用いた。4 行目の式は 1 と 2 の入れ替えに関して対称である。そして実際、上と全く同様に  $g_2 g_1 g_2$  を展開すると、上の 4 行目と同じ結果が導かれる。こうして、 $g_1 g_2 g_1 = g_2 g_1 g_2$  が示された。

### 3.3 TLJ 代数と Jones 多項式

組みひも群の表現に対してマルコフトレースが存在すると、結び目や絡み目の不変量が導かれる [20]。マルコフトレースとは、次の関係式を満たす汎関数である。

$$\begin{aligned} \phi(AB) &= \phi(BA), \quad A, B \in B_L \\ \phi(Ab_L) &= \tau\phi(A), \quad \phi(Ab_L^{-1}) = \bar{\tau}\phi(A), \quad A \in B_L \end{aligned} \quad (12)$$

組みひも群の表現 (10) に対して、マルコフトレースを以下のように定義できる。

$$\left( \prod_{k=1}^L \prod_{j=0}^{L-k} e_{k+2j} \right) A \left( \prod_{k=1}^L \prod_{j=0}^{L-k} e_{k+2j} \right) = \phi(A) \prod_{j=0}^{L-1} e_{1+2j}, \quad A \in B_L \quad (13)$$

これが (12) を満たすことは容易に示される。そして、 $\tau = -q^{-1}$  および  $\bar{\tau} = -q$  である。例えば  $g_1 \in B_2$  に対する値  $\phi(g_1) = 1 + q^{-2}$  は、次のように導かれる。

$$\begin{aligned} \phi(g_1) e_1 e_3 &= (e_1 e_3 e_2) g_1 (e_2 e_1 e_3) = e_1 e_3 e_2 e_2 e_1 e_3 + q e_1 e_3 e_2 e_1 e_2 e_1 e_3 \\ &= (Q^{1/2})^2 e_1 e_3 + q Q^{1/2} e_1 e_3 = (1 + q^{-2}) e_1 e_3 \end{aligned} \quad (14)$$

式 (13) で定義されたマルコフトレースを次のように規格化すると、結び目や絡み目のトポロジー不変量となる。実際  $\alpha_J(A)$  は Jones 多項式を与える。

$$\alpha_J(A) = \phi(A)(-q)^{e(A)} \quad A \in B_L \quad (15)$$

$e(A)$  は、 $A$  を表す生成元  $b_j$  等の指数の和である。例えば  $A = b_1^3 b_2^2 b_1^{-4}$  のとき  $e(A) = 3 + 2 - 4 = 1$  である。規格化因子は基本的には  $\tau^{-1}$  の  $e(A)$  乗である。(但し  $\tau\bar{\tau} = 1$ )

### 3.4 Yang-Baxterization と 6 頂点模型の転送行列 $\tau(u)$

転送行列の構成要素  $X_j^\pm(u)$  を TL 演算子  $U_j^\pm$  から次で定義する [16]。  $q = \exp(2\eta)$  とする。

$$X_j^\pm(u) = \sinh(u + 2\eta) I^{\otimes L} + \sinh u U_j^\pm \quad (16)$$

この定義と TLJ 代数の関係式 (6) を用いて、次のヤン・バクスター関係式が導かれる [16]。

$$X_j(u)X_{j+1}(u+v)X_j(v) = X_{j+1}(v)X_j(u+v)X_{j+1}(u) \quad (17)$$

この関係式は組みひも群の関係式の拡張である。このように組みひも群の表現などからヤン・バクスター関係式の解を導く手続きを、Baxterization あるいは Yang-Baxterization とよぶ。

6 頂点模型の転送行列を定義しよう。今までテンソル積空間  $V^{\otimes L}$  上の演算子を考えたが、0 番目の補助空間を加えて  $V^{\otimes(L+1)}$  上の演算子を定義する。具体的には、 $1 \leq j \leq L$  なる  $j$  に対して  $X_j^\pm(u)$  を  $I \otimes X_j^\pm(u)$  で置き換え、新たに  $j = 0$  に対して  $X_0^\pm(u)$  を定める。このとき、6 頂点模型の転送行列は次で表される [21]。

$$\tau(u) = \text{tr}_0 \left( X_{L-1}^\pm(u) \cdots X_1^\pm(u) X_0^\pm(u) \right) \quad (18)$$

実は  $\pm$  のどちらも同じ転送行列を導く。これがループ代数の証明のポイントである [22, 23]。

## 4 6 頂点模型転送行列および量子 XXZ 鎖のループ代数の対称性

### 4.1 量子群 $U_q(sl_2)$

量子群  $U_q(sl_2)$  の生成元  $E, F$  と  $H$  は、次のような交換関係を満たす。

$$[H, E] = 2E, \quad [H, F] = -2F, \quad [E, F] = \frac{q^H - q^{-H}}{q - q^{-1}} \quad (19)$$

量子群では、余積演算  $\Delta(\cdot)$  が定義されている。

$$\begin{aligned} \Delta(E) &= E \otimes q^{-H/2} + q^{H/2} \otimes E, \quad \Delta(F) = F \otimes q^{-H/2} + q^{H/2} \otimes F \\ \Delta(H) &= H \otimes I + I \otimes H \end{aligned} \quad (20)$$

余積は、量子力学における角運動量の合成則を抽象化した代数的操作である。以後、正整数  $n$  に対して  $[n] = (q^n - q^{-n})/(q - q^{-1})$  そして  $[0] = 1$  とする。また、 $[n]! = \prod_{k=1}^n [k]$  を定義する。



2次元線形空間  $V$  上の量子群の表現は、 $E = \sigma^+$ ,  $F = \sigma^-$ ,  $H = \sigma^Z$  となる。長さ  $L$  の転送行列  $\tau(u)$  は、テンソル積空間  $V^{\otimes L}$  に作用する。量子群  $U_q(sl_2)$  の生成演算子  $E, F, H$  の  $V^{\otimes L}$  上の表現  $S^+$ 、 $S^-$ 、 $S^Z$  は、余積を繰り返して次で与えられる。

$$\begin{aligned} q^{S^Z} &= q^{\sigma_1^Z/2} \otimes \cdots \otimes q^{\sigma_L^Z/2} \\ S^\pm &= \sum_{j=1}^L q^{\sigma_1^Z/2} \otimes \cdots \otimes q^{\sigma_{j-1}^Z/2} \otimes \sigma_j^\pm \otimes q^{-\sigma_{j+1}^Z/2} \otimes \cdots \otimes q^{-\sigma_L^Z/2} \end{aligned} \quad (21)$$

## 4.2 $sl_2$ ループ代数の定義

リー代数  $sl_2$  の生成演算子を  $T^a$  と表すと、 $sl_2$  ループ代数の演算子は複素変数  $z$  と任意の整数  $n$  に対して、 $T^a \otimes z^n$  と表される。これを  $T_n^a$  と表す。 $n$  は任意なので、演算子は無限個存在する。 $sl_2$  ループ代数に中心とよばれる元  $c$  を加えたものを、アファイン・リー代数  $\hat{sl}_2$  とよぶ。中心とは全ての元と交換する要素である。アファイン・リー代数  $\hat{sl}_2$  のシュバレー基底  $\{e_j, f_j, h_j; j = 0, 1\}$  は、アファイン・リー代数  $\hat{sl}_2$  を生成し、次の定義関係式を満たす。

$$\begin{aligned} [h_0, h_1] &= 0 \quad [h_i, e_j] = a_{ij}e_j \quad [h_i, f_j] = -a_{ij}f_j, \quad [e_i, f_j] = \delta_{ij}h_j, \quad (i, j = 0, 1) \\ [e_i, [e_i, [e_i, e_j]]] &= 0, \quad [f_i, [f_i, [f_i, f_j]]] = 0 \quad (i, j = 0, 1, \quad i \neq j) \end{aligned} \quad (22)$$

ここでアファイン・リー代数  $\hat{sl}_2$  のカルタン行列  $(a_{ij})$  は次式で定義される。

$$\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

## 4.3 量子群から導かれるループ代数の表現

演算子  $S^{\pm(K)}$  を  $S^{\pm(K)} = (S^\pm)^K / [K]!$  ( $K$  は正整数) で定める。具体的には次式となる。

$$\sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_K \leq L} q^{\frac{K}{2}\sigma^Z} \otimes \cdots \otimes \sigma_{j_1}^\pm \otimes q^{\frac{(K-2)}{2}\sigma^Z} \otimes \cdots \otimes q^{\frac{(K-2)}{2}\sigma^Z} \otimes \sigma_{j_2}^\pm \otimes \cdots \otimes \sigma_{j_K}^\pm \otimes q^{-\frac{K}{2}\sigma^Z} \otimes \cdots \otimes q^{-\frac{K}{2}\sigma^Z} \quad (23)$$

$S^\pm$  で  $q$  を  $q^{-1}$  に置き換え、次式で  $T^\pm$  を定義する。

$$\sum_{j=1}^L \left( q^{-\sigma^Z/2} \right)^{\otimes(j-1)} \otimes \sigma_j^\pm \otimes \left( q^{\sigma^Z/2} \right)^{\otimes(L-j)}$$

$T^{\pm(K)}$  を  $T^{\pm(K)} = (T^\pm)^K / [K]!$  で定義する。

変数  $q$  が 1 の原始  $2N$  乗根、あるいは 1 の原始  $N$  乗根で  $N$  は奇数の場合を考える [22, 23]。本報告ではこれ以降、 $q$  が 1 のべき根とはこの場合を意味するものとする。 $q$  が 1 のべき根のとき、演算子  $S^{\pm(N)}$ 、 $T^{\pm(N)}$  と  $S^Z$  を次のように対応させる。

$$e_1 = S^{+(N)}, f_1 = S^{-(N)}, e_0 = T^{-(N)}, f_0 = T^{+(N)}, h_0 = -h_1 = -S^Z/N \quad (24)$$

これらはアファイン・リー代数  $\hat{sl}_2$  の定義関係式 (22) を満たす [22]。  $h_0 + h_1 = 0$  より  $c = 0$  である。 $\hat{sl}_2$  で  $c = 0$  の場合は  $sl_2$  ループ代数になるので、演算子 (24) は  $sl_2$  ループ代数を生成する。

#### 4.4 ループ代数と転送行列 $\tau(u)$ の交換

変数  $q$  が 1 のべき根のとき、6 頂点模型の転送行列に  $sl_2$  ループ代数の対称性が出現する。演算子  $S^{\pm(N)}$  および  $T^{\pm(N)}$  と転送行列  $\tau(u)$  との間に、 $S^Z \equiv 0 \pmod{N}$  なるセクターにおいて、次の交換（反交換）関係が成立する。

$$S^{\pm(N)}\tau(u) = q^N\tau(u)S^{\pm(N)}, \quad T^{\pm(N)}\tau(u) = q^N\tau(u)T^{\pm(N)} \quad (25)$$

$q^N = -1$  のとき、上式は反交換関係である。

ループ代数は非可換な無限次元対称性であり、固有値スペクトルに非常に多くの縮退が生じる [22, 23]。ここで  $S^Z \equiv 0 \pmod{N}$  なる部分空間の中で関係式 (25) が成り立つことに注意しよう。例えば  $L = 12$  で  $N = 3$  の場合、下向きスピンのゼロの「真空」状態 ( $S^Z = 6$ ) に対して、 $S^Z = 3, 0, -3, -6$  の縮退した固有ベクトルが存在する。さらに、縮退度は  $2^{12/3} = 16$  となる。実は、 $L/N$  が整数のとき、「真空」状態の縮退度  $2^{L/N}$  を証明できる [24]。縮退次元は  $L$  の指数関数である。

6 頂点模型の転送行列は重要な可解量子スピン鎖と関係する。転送行列  $\tau(u)$  の対数微分から量子 XXZ 鎖のハミルトニアン  $\mathcal{H}_{XXZ}$  が導かれる [21]。

$$\tau(\epsilon) = \tau(0) \exp(\epsilon \mathcal{H}_{XXZ}) \quad (|\epsilon| \ll 1)$$

そこで変数  $q$  が 1 のべき根のとき、関係式 (25) より  $S^Z \equiv 0 \pmod{N}$  の部分空間で次が成り立つ。

$$[S^{\pm(N)}, \mathcal{H}_{XXZ}] = [T^{\pm(N)}, \mathcal{H}_{XXZ}] = 0.$$

すなわち、量子 XXZ 鎖の  $\mathcal{H}_{XXZ}$  は  $S^Z \equiv 0 \pmod{N}$  なる部分空間の中で、(24) の演算子で生成される  $sl_2$  ループ代数と交換する。

6 頂点模型に出現する  $sl_2$  ループ代数の無限次元非可換対称性 [22] は可解模型の研究で重要であるだけでなく、量子 XXZ 鎖を通じて量子系における準位交差の基本的な認識（von Neumann と Wigner の定理 [25]）を深める上でも役に立つであろう [26, 27, 28]。

#### 参考文献

- [1] A.D. Bates and A. Maxwell, *DNA Topology*, Oxford University Press, 1993.
- [2] F.B. Dean, A. Stasiak, T. Koller, and N.R. Cozzarelli, *J. Biol. Chem.* **260** (1985) 4975.
- [3] B.J. Peter, C. Ullsperger, H. Hiasa, K.J. Mariani and N.R. Cozzarelli, *Cell* **94** (1998) 819.
- [4] K.V. Klenin, A.V. Vologodskii, V.V. Anshelevich, A.M. Dykhne and M.D. Frank-Kamenetskii, *J. Biomol. Struct. Dyn.* **5** (1988) 1173.
- [5] V. Rybenkov, N.R. Cozzarelli and A.V. Vologodskii, *Proc. Natl. Acad. Sci.* **90** (1993) 5307.
- [6] S.Y. Shaw and J. C. Wang, *Science* **260** (1993) 533.

- [7] T. Deguchi and K. Tsurusaki, Phys. Lett. A **174** (1993) 29
- [8] T. Deguchi and K. Tsurusaki, in *Lectures at Knots '96*, edited by S. Suzuki, (World Scientific, Singapore, 1997) 95-122.
- [9] M. K. Shimamura and T. Deguchi, J. Phys. Soc. Jpn. **70** (2001) 1523.
- [10] M. K. Shimamura and T. Deguchi, Phys. Rev. E **65**, 051802 (2002). (9 pages)
- [11] T. Deguchi and M.K. Shimamura, Contemp. Math. **304** (2002) 93. .
- [12] M. K. Shimamura and T. Deguchi, J. Phys. A: **35** (2002) L241
- [13] H. Matsuda, A. Yao, H. Tsukahara, T. Deguchi, K. Furuta and T. Inami, Phys. Rev. E **68**, 011102 (2003). (4 pages)
- [14] J. des Cloizeaux, J. Physique Letters, (France) **42** (1981) L433
- [15] H.N.V. Temperly and E.H. Lieb, Proc. R. Soc. London Ser. A **322** (1971) 251.
- [16] R.J. Baxter, J. Stat. Phys. **28** (1982) 1.
- [17] V.F.R. Jones, Invent. math. **72** (1983) 1.
- [18] V.F.R. Jones, Bull. Amer. Math. Soc. **12** (1985) 103.
- [19] L.H. Kauffman, *Knots and Physics*, World Scientific, Singapore, (1991) (日本語訳 : 「結び目の数学と物理」、培風館)
- [20] 村杉邦夫、「結び目理論とその応用」、日本評論社、1993 年
- [21] T. Deguchi, in *Classical and Quantum Integrable Systems: Theory and Applications*, IOP Publ., (2003) 113-151.
- [22] T. Deguchi, K. Fabricius and B.M. McCoy, J. Stat. Phys. **102** (2001) 701.
- [23] T. Deguchi, J. Phys. A **37** (2004) 347.
- [24] T. Deguchi, J. Phys. A: Math. Gen. **35** (2002), 879; Int. J. Mod. Phys. B (2002) 1899.
- [25] J. v. Neumann and E. Wigner, Phys. Zeit. **30** (1929), 467.
- [26] O.J. Heilmann and E.H. Lieb, Ann. N. Acad. Sci. **172** (1971), 583.
- [27] E.A. Yuzbashyan, B.L. Altshuler, and B.S. Shastry, J. Phys. A: **35** (2002) 7525.
- [28] A. Nishino and T. Deguchi, Phys. Rev. B **68**, 075114 (2003). (14 pages)